



TITLE:

「相転移現象」II(講義ノート)

AUTHOR(S):

森, 肇

---

CITATION:

森, 肇. 「相転移現象」II(講義ノート). 物性研究 1972, 18(5): 206-234

ISSUE DATE:

1972-08-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/88494>

RIGHT:

## 「相転移現象」Ⅱ

九大理 森 肇

## §2. 臨界現象

## 2.0 序

臨界点の存在は、§1の〔Ⅲ〕Bで論じたように、相転移の基本的な性質の一つである。臨界点は熱力学的不安定点であり、熱力学関数の特異点となる。（一次の相転移点は熱力学関数の特異点ではない。）この臨界点の近傍では諸種の異常現象が現われ、それらを“臨界現象”と称して、最近実験、理論の両面から活発に研究されている。その基本的問題は何かを考えてみよう。

## a) 古典論の破綻

相転移の古典論として、良く知られているように、

- 1° 気体—液体転移に関する van der Waals の理論 (1873)
- 2° 強磁性に関する Weiss の理論 (1907)
- 3° 合金の秩序無秩序転移に関する Bragg-Williams の理論 (1934)

がある。合金の秩序無秩序転移は反強磁性転移に対応しており、order parameterに共役な外場  $H$  は化学ポテンシャルである。従って §1 の〔Ⅲ〕B で論じたように、2°と3°とは本質的に同等な現象を議論しているといえる。また、1°では分子間の引力だけでなく分子の大きさ、つまり hard core の効果を、格子模型を導入し一つの格子点には一つの分子しかこれないとすることによって表現すれば、つまり格子気体を導入すれば、2°の理論は、相転移の側面に関する限り、1°の van der Waals の理論に含まれてしまうといえる。このように上記3つの理論は同じ性格をもつものであり、これらの理論が臨界点附近で共通にもつ、自由エネルギーの解析的性質を抽象したものとして Landau の現象論 (1937) がある。

古典論は、このように、相転移に関して統一的な観点と結果とを与える。臨界現象を特徴づけるものとして、まず、 $\alpha, \beta, \gamma$  という臨界指数 (critical index, exponent) を導入する。強磁性転移を例にとれば、臨界点  $T_c$  の近傍で零磁場比熱を

$$C_{H=0} \sim \varepsilon^{-\alpha}, \quad (\varepsilon \equiv |T - T_c|/T_c), \quad (1)$$

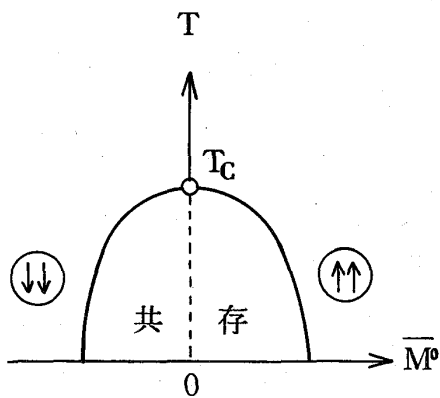
自発磁化 (磁化密度の  $z$  成分  $M^0$  の平均値) を

$$\bar{M}^0 \sim \varepsilon^\beta, \quad (T < T_c), \quad (2)$$

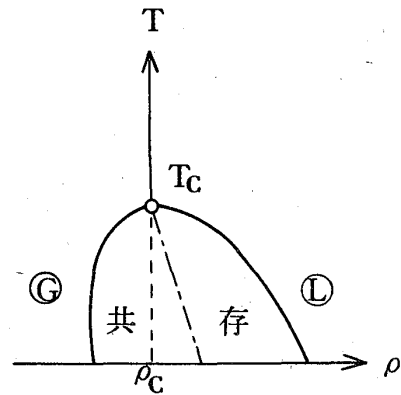
等温帯磁率を

$$\chi \sim \varepsilon^{-\gamma} \quad (3)$$

とする。  $\beta$  は下図に示した共存領域の、  $T_c$  近傍での



a) 強磁性転移



b) 気体-液体転移

形をきめる指数である。b) 図の一点鎖線は共存領域の中心線を表わし  $P$ - $T$  相図における気体-液体転移線の傾きに対応して傾きをもつ。定磁場比熱および等温帯磁率はそれぞれエネルギーおよび order parameter の揺ぎに比例し、

$$C_H = \frac{1}{k_B T^2 V} \langle (\mathcal{H} - \langle \mathcal{H} \rangle)^2 \rangle, \quad (4)$$

$$\chi = \frac{1}{k_B T V} \langle (M^0 - \langle M^0 \rangle)^2 \rangle, \quad (5)$$

エネルギー  $\mathcal{H}$ , order parameter  $M^0$  の揺ぎの強さを表わす。気体-液体転移の場合には定積比熱, 粒子密度  $(\rho - \rho_c)$ , 等温圧縮率をとればよい。これらの指数はまた臨界点近傍における ordering の様子を表わすと考えてよい。つまり,  $\alpha$  は short range order の揺ぎの相関成長を,  $\beta$  は  $T_c$  の下で long range order の消失を,  $\gamma$  は long

order の揺ぎの相関の成長を表わすといえる。

古典論は模型によらず次のように同一の値を与える。

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad r = 1. \quad (6)$$

( $\alpha = 0$  は発散がなく、定磁場比熱が不連続に変わることを意味する。) 特に重要なことはこれら臨界指数の値が、

[1] 次元によらない。

[2] Isingか Heisenberg スピンか、また、格子模型か連続体模型かによらない。  
つまり相互作用の対称性によらない。

[3] 相互作用の force range および強さによらない。

ということである。しかし、1次元では相転移しない模型が可能であり、[1]は古典論の欠陥であることが古くから知られていた。また、最近、Ising スピンと等方的 Heisenberg スピン系とでは臨界指数の値が異なるだけでなく、相転移の様相も異なることが明らかとなった。例を挙げれば

表 1

次元		$\alpha$	$\beta$	$r$	
3D	Ising	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{4}$	級数展開法
	Heisenberg	$0 +$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	実験その他
2D	Ising	$0 +$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{4}$	厳密解
	Heisenberg	LRO なし			
1D	Ising	$J_{ij} \sim 1/R^{1+s} (1>s>0)$ のときには相転移あり			
	Heisenberg	LRO なし			
	0+ は対数発散 $\ell n \epsilon$ を意味する。 LRO は long range order の略号。				

気体-液体転移に関する格子気体模型と連続体模型とはそれぞれ強磁性転移に関する Ising 模型と等方的 Heisenberg 模型とに対応すると考えられる。実際、気体-液体転移の実験値は等方的 Heisenberg 模型が良く成立つと考えられる反強磁性体の実験値(上記の表)と殆んど同じ値を与える。実験としては、気体-液体の場合がは

るかにきれいなものがでる。液体はきれいに出来やすく、また異方性の問題が少ないからである。上記の表のように、古典論の特徴 [1], [2], [3] のいずれもが決定的に破綻した。重要なことは、臨界指数の値が (6) からずれたということではなく、古典論のもつ統一性が破れた、ということにある。

#### b) 統一的理論の可能性

古典論に代る、新しい統一的理論は現在いろいろの観点から探求されている。そのような理論の可能性を示唆する事実もいくつか見つかっている。(6) および表 1 の臨界指数の値は、いずれの場合も

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (7)$$

の関係を満す。その他後で述べるように、臨界指数の間に、模型によらない諸種の関係式が見出された。このような簡単で普遍的な関係式が成立つ基盤を明らかにするために scaling law という観点が提案され、現在それを中心または起点として諸種の研究が展開されている。

場所  $\mathbf{r}$  における磁化密度の  $z$  成分の揺ぎを  $\delta M^0(\mathbf{r}) \equiv M^0(\mathbf{r}) - \langle M^0 \rangle$  とすれば、波動ベクトル  $\mathbf{k}$  をもつ不均一な磁場に対する帯磁率は

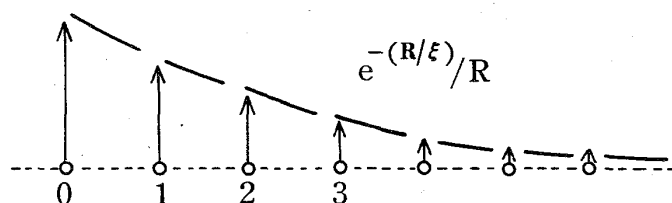
$$\chi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{k_B T} \int \langle \delta M^0(\mathbf{r}) \delta M^0(\mathbf{r}') \rangle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}', \quad (8)$$

$$= \frac{1}{k_B T} \frac{1}{V} \langle |M_{\mathbf{k}}^0|^2 \rangle, \quad (9)$$

とかける。ここに  $M_{\mathbf{k}}^0$  は  $\delta M^0(\mathbf{r})$  のフーリエ成分である。 $k \rightarrow 0$  の極限で、 $\chi_{\mathbf{k}}$  は通常の一様な磁場に対する帯磁率  $\chi$  に一致する。その収斂の様子は、2.6 節で示すように、

$$\chi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(1/\chi) + Bk^2} \quad (10)$$

で与えられる。これは次のように解釈できる。いま下図のように原点 0 のスピンを仮想的に固定すると、



その隣り 1 のスピンは交換相互作用のために上をむく傾向にあるが、熱運動のためにその平均値は少し小さな値をとる。その隣りのスピンの平均値は更に小さな値をとり、図のように、次第に減少するスピンの平均値が得られる。この曲線は原点から十分に離れた所では screened coulomb type  $e^{-(R/\xi)}/R$  で表わせる。ここに  $\xi$  は相関距離である。これは、 $\delta M^0(\mathbf{r})$  の値を固定したときの  $\delta M^0(\mathbf{r}')$  の平均値  $\langle \delta M^0(\mathbf{r}') \rangle_{\delta M^0(\mathbf{r})}$  を与えるから

$$\langle \delta M^0(\mathbf{r}) \delta M^0(\mathbf{r}') \rangle = A e^{-(R/\xi)}/R \quad (11)$$

であることを意味する。ここに  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  である。(11) のフーリエ変換は良く知られているように (10) 式の  $k$  依存性を与える。臨界点の近傍で、 $1/\chi$  が  $\epsilon^r$  に比例して零となることは、 $\langle |M_k^0|^2 \rangle$  が  $k^2$  に逆比例して異常に大きくなることを意味する。また相関距離  $\xi$  の温度依存性は

$$\xi \sim \sqrt{\chi} \sim \epsilon^{-\nu}, \quad (\nu = r/2) \quad (12)$$

で与えられ、 $\xi$  は臨界点に近づくにつれて異常に大きくなることがわかる。

臨界点の特徴は、このように、その近傍で order parameter の長波長の揺ぎが異常に大きくなることにある。実際、強磁性体のキュリー点の近くで中性子線の磁氣的散乱が異常に大きくなったり、気体の臨界点の近くで光の異常散乱（臨界蛋白光）がおこるのは、それぞれ、磁化密度および粒子密度の長波長の揺ぎが異常に大きくなることによる。臨界現象は、このように、長波長の揺ぎが異常に大きくなることに起因し、したがって、体系の詳細な構造には依存しない簡単な法則が成立つ可能性がある。ここに種々の体系のいろいろな臨界現象を統一的に取扱える可能性がひそんでいるといえる。scaling law（および極く最近の Wilson の理論）は、臨界現象のこの特徴を具体的に捉

えたものであり、本格的な理論をつくるための素地が用意されてきたと考えられる。なお、相転移が起るかどうかが  $T_c$  の値を決めるものは、§1〔IV〕で議論したように、基本的には connectivity であって体系の詳細な構造に依存する。相転移が起るときには、臨界点近傍における諸種の発散を決めるものは臨界変数の長波長の揺ぎである、ということである。

### c) 動的臨界現象

大きな揺ぎが起るためには、既に起った揺ぎが decay し難いことが必要である。従って、大きな揺ぎが起る臨界点の近傍では、非平衡状態の平衡への緩和が異常に遅くなる。この現象を critical slowing-down とよぶ。例として磁化密度の  $z$  成分の揺ぎを考えよう。そのフーリエ成分  $M_{\mathbf{k}}^0$  の時間変化の式は、波長  $k$  が非常に小さいとき、

$$dM_{\mathbf{k}}^0/dt = -r_{\mathbf{k}} M_{\mathbf{k}}^0 + f_{\mathbf{k}}(t) \quad (13)$$

とかける。ここに  $f_{\mathbf{k}}(t)$  は揺動力であり、揺動散逸定理によって、減衰常数  $r_{\mathbf{k}}$  はその時間相関によって

$$r_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\langle |M_{\mathbf{k}}^0|^2 \rangle} \int_0^\infty \langle f_{\mathbf{k}}(t) f_{\mathbf{k}}^*(0) \rangle dt \quad (14)$$

と与えられる。分母の  $\langle |M_{\mathbf{k}}^0|^2 \rangle$  は帯磁率  $\chi_{\mathbf{k}}$  に他ならないので、臨界点に近づくにつれて減衰常数  $r_{\mathbf{k}}$  は異常に小さくなることになる。ただし揺動力の時間相関は帯磁率に比べると弱い異常性しかもたないとした。このように critical slowing-down は order parameter (一般に臨界変数) の臨界揺動の動的側面を表わす。

#### 1° 輸送係数の臨界異常

実は揺動力の時間相関も、帯磁率ほど強くはないにしても、臨界異常を示す。それは、揺動力  $f_{\mathbf{k}}(t)$  の中に、モード間相互作用によって例えば

$$-i \sum_{\mathbf{p}} V_{\mathbf{k}\mathbf{p}} M_{\mathbf{p}}^+ M_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}^- \quad (15)$$

の様に波動ベクトルの異なるフーリエ成分からなる非線型項が含まれているからである。ここに  $M^\pm$  は磁化密度の横成分を表わす。波数  $p$  が小さいとき、この非線型項の揺ぎも異常に大きくなるため、(14) の分子からも臨界発散が現われる可能性がある。そこで揺動力を

$$f_{\mathbf{k}}(t) \simeq R_{\mathbf{k}}(t) + q_{\mathbf{k}}(t) + (\text{干渉項}) \quad (16)$$

の二つの部分に分けよう。ここに  $R_{\mathbf{k}}(t)$  は短波長成分だけからなる完全に random な部分で、臨界揺動を含まない部分である。 $q_{\mathbf{k}}(t)$  は  $M_{\mathbf{p}}^{\alpha}$  の長波長成分だけからなる非線型部分であり、輸送係数の臨界異常を与える部分である。第三項はそれら二つの部分の干渉項である。そのとき減衰常数は

$$r_{\mathbf{k}} \simeq r_{\mathbf{k}}^0 + \psi_{\mathbf{k}} \quad (17)$$

と二つの部分に分れる。ここに  $r_{\mathbf{k}}^0$  は  $R_{\mathbf{k}}(t)$  の時間相関で決まる部分である。 $\psi_{\mathbf{k}}$  は非線型揺動力  $q_{\mathbf{k}}(t)$  の時間相関によって決まる部分であり、

$$\psi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\langle |M_{\mathbf{k}}^0|^2 \rangle} \int_0^{\infty} \langle q_{\mathbf{k}}(t) q_{\mathbf{k}}^*(0) \rangle dt \quad (18)$$

と与えられる。なおこのように簡単に分離されたのは、中間波長成分の寄与を問題にしなかったからである。 $r_{\mathbf{k}}$  は中性子線散乱によって測定されるが、最近の精密な実験によって、 $r_{\mathbf{k}}$  の温度依存性は  $\langle |M_{\mathbf{k}}^0|^2 \rangle$  の臨界発散だけを考慮したものより弱く、(18) の分子も異常増大を示し分母からくる異常を弱めることが明らかとなった。

モード間相互作用により揺動力の臨界発散が顕著に現われる例として、超音波吸収の臨界発散や反強磁性体の ESR の巾の異常増大がある。これらの現象の特徴は、注目しているモード、例えば音波のモード  $a_{\mathbf{k}}^+$  が order parameter ではないことである。そのため(14)の分母は臨界異常を示さないが、揺動力  $f_{\mathbf{k}}(t)$  の中には、モード間相互作用によって order parameter の長波長成分が這入ってくる。そのため(18)の分子だけが臨界発散を示し、それが超音波吸収や ESR の巾の異常増大をもたらすこととなる。気体-液体転移の臨界点における熱伝導度の異常増大や臨界溶液における粘性係数の異常増大も事情はいま述べたことと同じである。

このように、緩和常数や輸送係数をきめる揺動力の中に臨界揺動を示す変数の長波長成分が含まれ、それが臨界異常の修正または臨界異常そのものをもたらすわけである。したがって、ここでは

- [1] 臨界揺動を示す変数 (order parameter, エネルギー密度等) および粒子密度, 運動量密度など保存則を満たすマクロな変数との間のモード間相互作用による非線型項の揺ぎをとりいれること。



[2] これらの変数はいずれも slowly-varying モードだから、例えば(18)の時間積分にあたり、それらのモードの life-time effects を正しくとり入れることが必要であるといえる。これはまた揺ぎの非線型動力学の問題に他ならないが、線型輸送係数を決める揺動力の時間相関を問題とする限り、明確な基礎の上に議論できるはずであり、今後の発展が期待される。

なお金属強磁性体反強磁性体でみられる電気抵抗の温度微分の異常増大や強誘電体、絶縁磁性体でみられる熱伝導度の dip も、高次の異常ではあるが、本質的には今述べたことと同様な問題である。

## 2° dynamic scaling laws

動的臨界現象も、このように、臨界変数の長波長の揺ぎに起因する。そこで scaling law を動的現象に拡張する試みが Ferrell et al および Halperin & Hohenberg によって行なわれた。まず(10)式が

$$\langle |M_{\mathbf{k}}^{\alpha}|^2 \rangle = \xi^{(r/\nu)} f_{\alpha}(k\xi) \quad (19)$$

の形にかけることに注意しよう。ここで  $\alpha$  は 0,  $\pm$  であり、 $T_c$  の下では関数  $f_{\alpha}(x)$  は  $z$  成分と横成分とは異なる。しかし一般に

$$f_{\alpha}(x) \sim \begin{cases} \text{const}, & (x \ll 1) \\ x^{-(r/\nu)}, & (x \gg 1) \end{cases} \quad (20)$$

なる性質をもつ。つまり(19)は  $k$  と  $1/\xi$  との斉次関数である。(19)を拡張して、時間相関関数の long-time tail が

$$\langle M_{\mathbf{k}}^{\alpha}(t) M_{\mathbf{k}}^{\alpha*} \rangle / \langle |M_{\mathbf{k}}^{\alpha}|^2 \rangle = F_{\alpha}(t z_{\mathbf{k}}, k\xi) \quad (21)$$

の形をもつと仮定しよう。ここに  $z_{\mathbf{k}}$  は特性複素振動数であり、 $k$  と  $1/\xi$  とのある斉次関数

$$z_{\mathbf{k}} = \xi^{-\theta} g_{\alpha}(k\xi) \quad (22)$$

であるとする。この仮定は波数  $k$  を  $1/\xi$  で、時間  $t$  を  $1/z_{\mathbf{k}}$  で scale すればもはや波数にも温度にも依らない一定の関数  $F_{\alpha}(x, y)$  がえられることを主張する。しかも特性振動数の次数  $\theta$  は臨界点の上下をとわず、またスピンの縦成分横成分をとわず一定の値をもつと主張する。臨界点の下ではスピン波が存在するが、その振動数および臨界点の

下および上における縦成分の減衰常数はいずれも波数と温度の依存性が(22)の型をもちしかも $\theta$ が同じというのである。このような簡単な法則は通常の集団運動では見られない興味深いものである。なお強磁性体では $\theta = \frac{1}{2}$ , 反強磁性体では $\theta = \frac{3}{2}$ がえられる。これらの結果は中性子線乱の実験とよく一致し, scalingの仮定が正しいことを示している。この仮定の理論的研究も, 関数 $g_\alpha(x)$ および $F_\alpha(x, y)$ を具体的にきめることも含めて, いろいろの観点から研究されている。この問題もまた長波長の揺ぎの非線型動力学の問題に他ならない。

#### d) short-range order 効果

臨界変数の長波長の揺ぎによる臨界現象を眺めてきたが, しかし相転移の面白さは short-range order にあるともいえる。相転移を起すのは connectivity による協力性であり, それを的確に表現するものとして short-range order が必要だからである。希薄強磁性体の臨界濃度の問題はその典型的な例である。とくに等方的 Heisenberg スピンの場合には, connectivity による協力性と長波長の集団モードによる揺ぎとの間の競い合いで臨界濃度がきまると考えられる。

長波長の揺ぎに対する short-range order の効果を正しく取り入れることは静的又動的臨界現象のミクロな理論をつくるときにも必要であるが, そのためには, 短波長および中間波長のモードを順次繰りこむ方法を見出さねばならない。

### 2.1 order parameters

種々の例における order parameter  $\eta$  とそれに共役な field  $H$  を表に示す。

	ferro mag. $J_{\parallel} >  J_{\perp} $	ferro mag. $J_{\perp} >  J_{\parallel} $
$\eta$	$M^z$	$M^x$
$H$	$H$ (uniform field)	$H^x$

Antiferomag.	Gas-Liquid
$M' = M_A^z - M_B^z$	$\rho - \rho_c$
$H'$ (staggered field)	$p$ or $\mu$

He II	超伝導
$\psi^+(\mathbf{r})$ (condensate の wave fu.)	$\psi_{\uparrow}^+(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^+(\mathbf{r})$ (Cooper pair の wave fu.)
?	?
Excitonic phase	N 液晶
$\psi_a^+(\mathbf{r}) \psi_b(\mathbf{r})$ (電子空孔対)	$P_2 (\cos \theta)$
?	?
lattice distortion	液体↔固体
soft phonon の creation op.	5 体分布函数
?	?

この表でわかるように order parameter に対する conjugate field は磁性体の場合などは物理的に明確だが、むしろまだはっきりしていない例の方が多い。又必ずしも order parameter を使わない理論もある。例えば二次元 Ising の Onsager の厳密解には order parameter の観点は使われていない。だから数学的に厳密であっても結果の理解はむずかしいともいえる。§1 の [Ⅲ] B で論じたように、order parameter とそれに共役な field を導入すれば、種々の相転移の間に際立った similarity が成立つ。そこでここでは order parameter の観点を進める立場をとる。そのために次に order parameter の性格を規定していくことにしよう。

(A) 自由エネルギー  $G_1(T, X; \eta)$

Gibbs の自由エネルギーは intensive な量を独立変数とする。

$$dG = -SdT - \sum_i x_i dX_i - \eta dH \quad (1)$$

ここで  $X_i$  は一般に外場、圧力等を表わすものとする。order parameter を積極的に取出すために、これにルジャンドル変換をほどこした  $G_1$  という量を定義する。

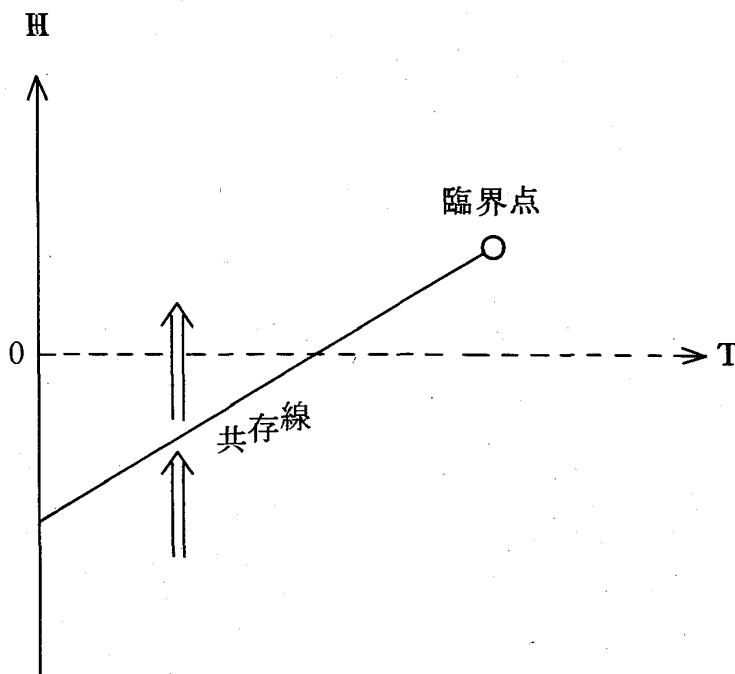
$$G_1 \equiv G(T, X; H) + \eta H, \quad (2)$$

$$dG_1 = -SdT - \sum_i x_i dX_i + Hd\eta \quad (3)$$

相転移の特徴は縮退した状態（二相共存）が現われるということである。統計力学的に言えば、位相空間は ergodic でみなすべてつながった領域であるが、それが相転移になれば互いに独立なマクロな領域にわかれてしまうのである。わかれてしまったこれらのマクロな領域の一つ一つを区別する、すなわち縮退を区別するのが order parameter というわけである。だから相転移の議論には order parameter の助けが必要であるといえる。そのために  $G_1$  を導入したのである。

### (B) Phase diagram

$H$  をあたらしき座標軸にとれば臨界点の近くでは一般に下図の様である。



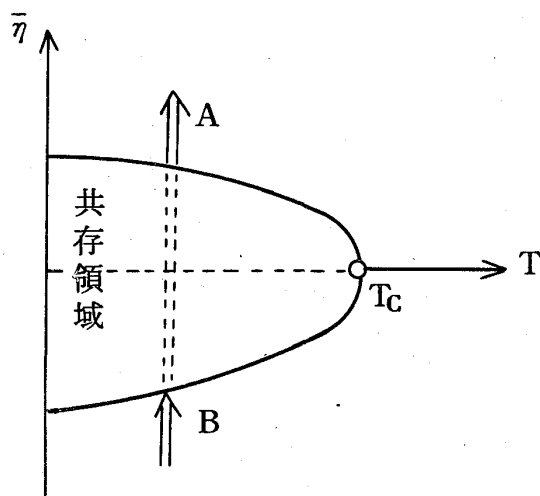
今、二重線の矢印に沿って共存線を横切るものとする。そこでは first order transition が起こる。共存線の下側の量を two dash, 上側の量を dash をつけて表わすものとすれば、次の Clausius-Clapeyron の式を得る。共存線に沿って

$$\left(\frac{dH}{dT}\right)_\sigma = -\frac{s' - s''}{\eta' - \eta''} = -\frac{\Delta s}{\Delta \eta} \quad (4)$$

臨界点では  $\Delta s$ ,  $\Delta \eta$  共に zero になる。

(C) 共存領域

$\eta$  をとれば共存領域がひらいてくる。簡単のために、以下  $H$ - $T$  space での共存線の勾配が zero の場合を考える。(適当な変換を行なえばいつでもそうもっていける。)



A, B での  $\eta$  の差が  $\Delta \eta$  である。もちろん  $T_c$  の近くで  $\Delta \eta \rightarrow 0$  となる。このとき次のように  $\beta$  を定義する。

$$\Delta \eta \sim (T_c - T)^\beta, \quad (\beta > 0) \quad (5)$$

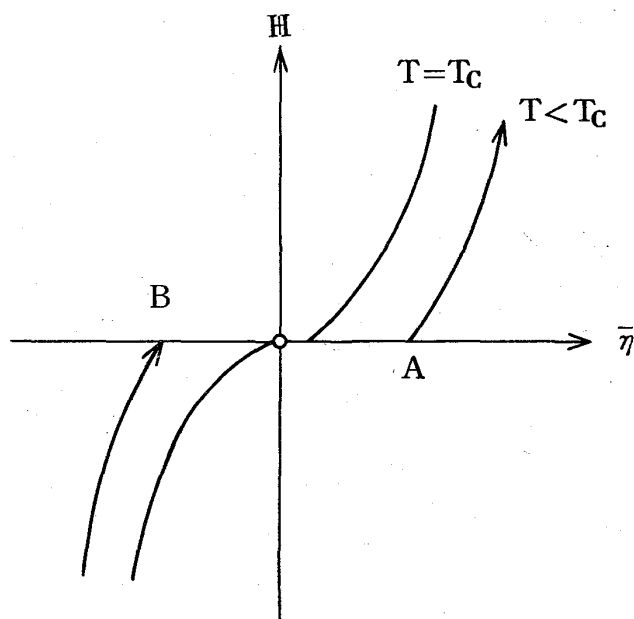
(D) Isotherm (等温線)

$\eta$  の平衡値は次の式で決まる。

$$\left(\frac{\partial G_1}{\partial \eta}\right)_{T, X} = H \quad (6)$$

これを  $\eta$  について解いて

$$\bar{\eta} = \eta_H(T, X) \quad (7)$$



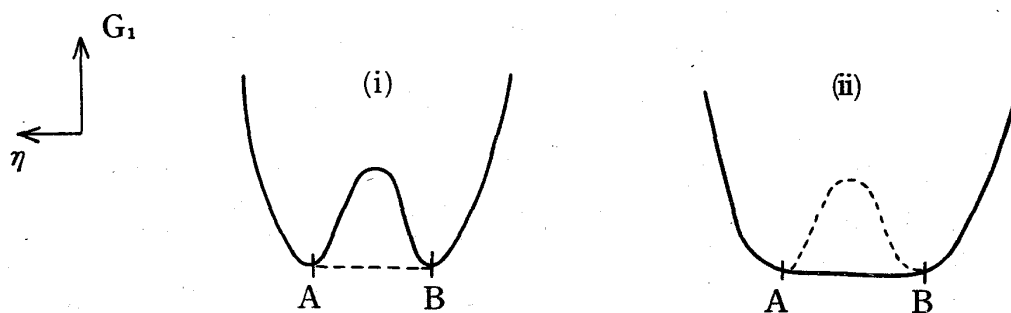
ここで特に  $T=T_c$  curve の原点付近の曲率は重要な意味を持つ。そこで次のような critical index  $\delta$  を定義する。

$$H \sim \text{sgn} \{ \bar{\eta} \} \cdot |\bar{\eta}|^{\delta}, \quad (T=T_c) \quad (8)$$

#### (E) $G_1$ versus $\eta$

共存線上で  $H$  が 0 である場合を考える。

$G_1$  を  $\eta$  の関数として描く。その場合 (i) homogeneity condition を課すか, (ii) 二相共存を許すかで,  $G_1$  曲線は違ったものになる。



(i) の場合二つの local minima A, B が現われ, (ii) の場合共存線 AB が現われる。(ii) の場合をいろいろの温度で描けば, 下図がえられる。ここで斜線部は共存領域であり,

その境界を示す点線の原点附近の曲率は, 臨界指数  $\beta$  で表わされているわけである。

なお, 気体-液体転移などの場合のように共存線上の  $H_\sigma(T, X)$  が zero でない場合には,  $G_1$  の代りに,

$$\tilde{G}_1 \equiv G_1(\eta) - \eta H_\sigma \quad (9)$$

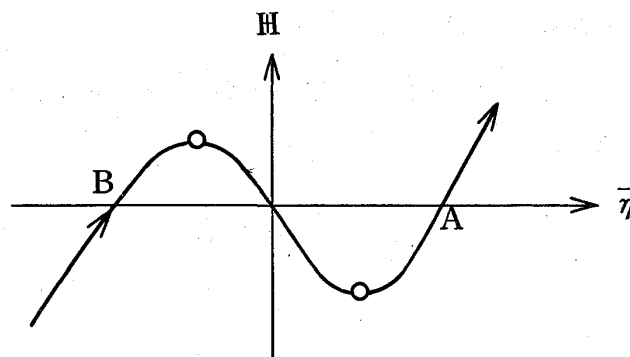
を考えれば, 上と同様な図がえられる。

## 2.2 熱力学的不安定性

臨界点は熱力学的不安定点であり, そこでは次の関係式が成立つ。

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \bar{\eta}}\right)_{T, X} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{\eta}^2}\right)_{T, X} = 0 \quad (10)$$

homogeneity condition を課すことにして, van der Waals loop を描くと, 一階微分 zero の条件からは下図のように二つの解が出る。



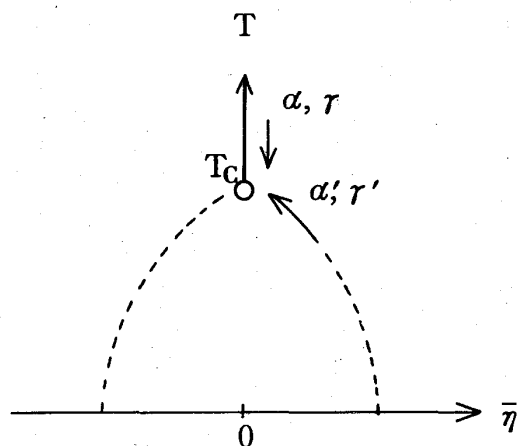
二階微分 zero という条件は上の二つの極値が一致することを要求する。したがって  $\delta > 2$  でなければならない。

以上の議論は homogeneity condition を課すならば、いつでも成立つものであって、決して古典論に特有のものでもないし、近似理論に特有のものでもないことに注意すべきである。なお有限系では domain の表面エネルギーの分だけ homogeneous state の自由エネルギーが低く、このような条件なしに metastable state が現われうることになる。

critical index を定義しておく。

$$\chi^{-1} \equiv \lim_{H \rightarrow 0} \left( \frac{\partial H}{\partial \eta} \right)_{T, X} \sim \epsilon^r (T > T_c), \epsilon^{r'} (T < T_c) \quad (11)$$

$$C_{H=0} \equiv - \lim_{H \rightarrow 0} T \left( \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_{H, X} \sim \epsilon^{-\alpha} (T > T_c), \epsilon^{-\alpha'} (T < T_c) \quad (12)$$



転移点の下から近づく場合には dash をつけて区別する。

ここで実は大きな仮定が入っている。それは zero 磁場の帯磁率が定義できるということであるが、その保証はあるかという問題である。確かにその保証がない場合がある。たとえば等方的な強磁性体の spin 波領域では一様な帯磁率は定義できない。磁場がないとき、波動ベクトル  $\mathbf{k}$  の Fourier component を持った sinusoidal な磁場に対する帯磁率は  $1/k$  に比例する。(もちろん  $\chi_{\mathbf{k}} \propto \frac{1}{k^2}$ )。

このときには小さな波数の所で帯磁率は発散する。 $T_c$  の近くでは Green 関数の方法で計算してみると、平行の磁場では  $1/k$  の発散を示している。このように ordered state では、必ずしも  $r'$  を定義できない可能性がある。classical の場合でも Berlin-Kac の spherical model の場合には結果は同じで、磁場に直すと一般に  $1/\sqrt{H}$  の発散がある。この問題は実は symmetry-restoring collective mode の寄与と関



係している問題で、等方的な Heisenberg model とか、X'-Y model のときに現われるわけである。

### 2.3 critical indices

理論および級数展開法による値を表にしておこう。

	$T < T_c$				$T = T_c$		$T > T_c$		
	$\alpha'$	$\beta$	$r'$	$\nu'$	$\delta$	$\eta$	$\alpha$	$r$	$\nu$
古 典 論	0 不連続	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	3	0	0 不連続	1	$\frac{1}{2}$
3-d Ising (RPA)							$\frac{1}{2}$	1	
3-d Heisenberg (RPA)							0	2	
2-d Ising	0 +	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{4}$	1	15	$\frac{1}{4}$	0 +	$\frac{7}{4}$	1
3-d Ising (級数展開)	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{21}{16}$		$\frac{26}{5}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{9}{14}$
3-d Heisenberg (級数展開)									
$S = \frac{1}{2}$						0.08	0 +	1.36	0.74
$S = \infty$						0.075	0 +	1.33	0.70

但し 0 + は対数発散を表わしている。

ここで注意することとして、2-d Ising では  $\alpha$  と  $\alpha'$ 、 $r$  と  $r'$  が同じであるが、3-d Ising ではそうでないということがある。なお 3-d Heisenberg でも級数展開による推測があるけれど、Ising の場合とは違って、長波長のゆらぎの寄与が重要だから級数展開の結果はあまり信頼出来ない。

## 2.4 臨界指数に対する不等式

臨界指数の間には一般に次の不等式が成立つことを証明出来る。これは熱力学の範囲のことなので、臨界指数が存在するということさえみとめれば、ごく一般的に証明できるし、又 model にもよらない。

$$\alpha' + 2\beta + \gamma' \geq 2, \quad (13)$$

$$\alpha' + \beta(1 + \delta) \geq 2 \quad (14)$$

critical index の表にあたってみるとわかるように、この式で等号が成立っている可能性が強い。

## (1) 仮定

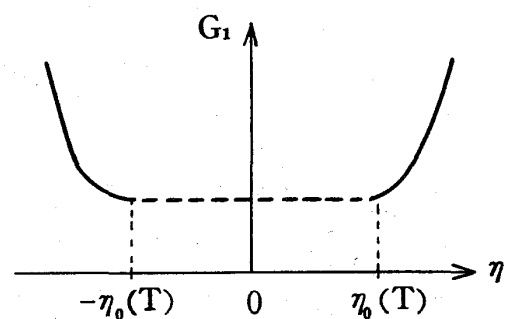
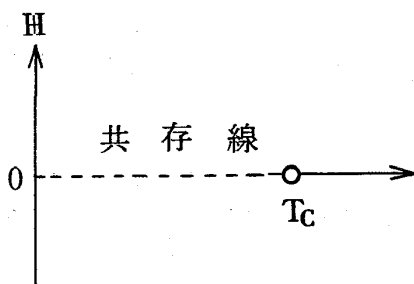
$$C_\eta \equiv T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_\eta = -T \left( \frac{\partial^2 G_1}{\partial T^2} \right)_\eta \geq 0, \quad (15)$$

$$\chi^{-1} \equiv \left( \frac{\partial H}{\partial \eta} \right)_T = \left( \frac{\partial^2 G_1}{\partial \eta^2} \right)_T \geq 0 \quad (16)$$

例えば磁性体のときには、反磁性項を無視して、すなわちハミルトニアンにおいて磁場について2次の項を無視した範囲で、いつでも帯磁率の逆数が正であるということ、統計力学的に導くことが出来る。というわけだが、一般にはこれは仮定である。

## (2) 証明

簡単のため  $\left( \frac{dH}{dT} \right)_\sigma = H_\sigma = 0$  とする。  $T < T_c$  を考える。



共存線上では (すなわち  $|\eta| \leq \eta_0(T)$  では) 状態が縮退しているから

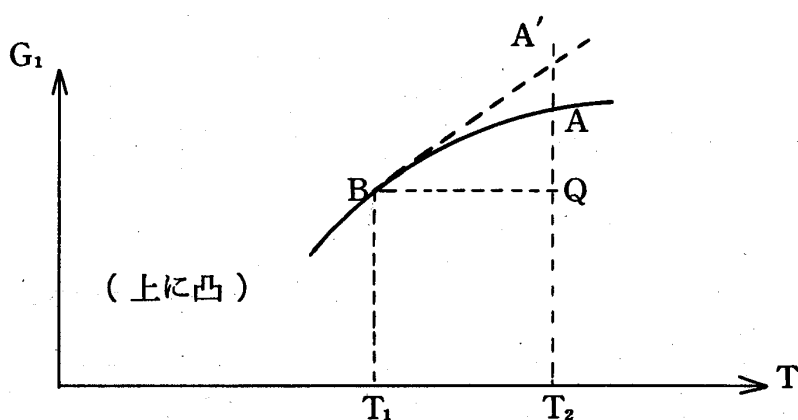
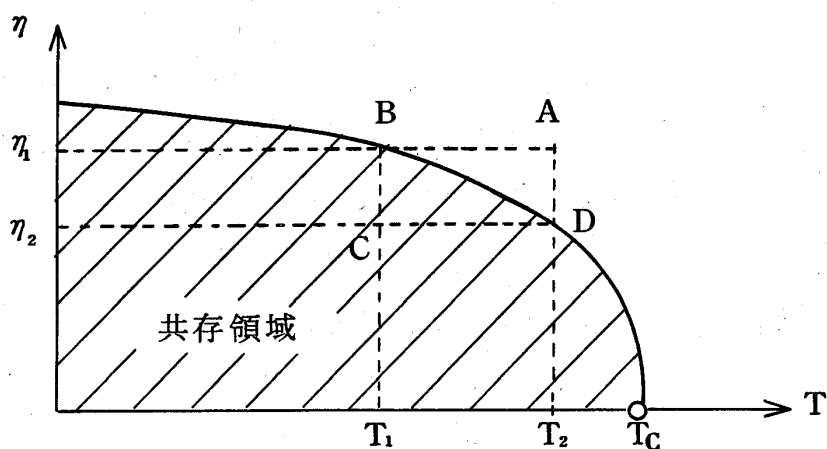
$$G_1(T, \eta) = G_1(T, 0) \equiv G_1^0(T) \quad (17)$$

共存線の近傍 ( $|\eta| \gtrsim \eta_0(T)$ ) では展開して

$$G_1(T, \eta) = G_1^0(T) + \frac{1}{2} \chi^{-1} [\eta - \eta_0(T)]^2 + \dots \quad (18)$$

ここに  $\chi$  は零磁場帯磁率であり, また  $H_\sigma = 0$  を使った。

さて図のような  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  を導入する。



上の図で  $AQ \leq A'Q$  だから、ただちに

$$G_1(T_2, \eta_1) \leq G_1(T_1, \eta_1) - (T_2 - T_1) S(T_1, \eta_1)$$

同様にして

$$G_1(T_1, \eta_2) \leq G_1(T_2, \eta_2) - (T_1 - T_2) S(T_2, \eta_2)$$

但し  $(\partial G_1 / \partial T)_\eta = -S$  を用いた。共存領域では  $G_1(T, \eta)$  は order parameter  $\eta$  に依らず温度のみの関数となるから (例えば図の B 点と C 点では  $G_1$  の値は同じ)

$G_1(T_1, \eta_1)$  と  $G_1(T_1, \eta_2)$  とは等しい。このことに注意して、上の二つの不等式を辺々加えると、次の不等式を得る。

$$G_1(T_2, \eta_1) - G_1(T_2, \eta_2) \leq (T_2 - T_1) [S(T_2, \eta_2) - S(T_1, \eta_1)]$$

状態の縮退を考慮すると

$$G_1(T_2, \eta_1) - G_1^0(T_2) \leq (T_2 - T_1) [S^0(T_2) - S^0(T_1)] \quad (19)$$

これが基本となる不等式である。

$G_1(T_2, \eta_1)$  について  $|\eta| \gtrsim \eta_0(T)$  での展開式 (18) を代入し、 $(T_2 - T_1)^2$  で辺々割り算すると

$$\frac{1}{2} \chi^{-1} \left( \frac{\eta_1 - \eta_0(T_2)}{T_2 - T_1} \right)^2 \leq \frac{S^0(T_2) - S^0(T_1)}{T_2 - T_1}$$

ここで  $T_2 \rightarrow T_1$  の極限をとり、 $T_1$  をあらためて  $T$  とすることにすれば、

$$\frac{1}{2} \chi^{-1} \left( \frac{d\eta_0}{dT} \right)^2 \leq \frac{1}{T} C_{H=0}, \quad (H=0) \quad (20)$$

両辺の対数を取って、辺々  $-\ell_n \epsilon$  ( $>0$  for  $\epsilon \ll 1$ ) で割ってやると、

$$-\frac{\ell_n \chi^{-1}}{\ell_n \epsilon} - 2 \frac{\ell_n \left( \frac{d\eta_0}{dT} \right)}{\ell_n \epsilon} \leq -\frac{\ell_n C_{H=0}}{\ell_n \epsilon}$$

先に定義した critical index を用いると

$$-r' - 2(\beta - 1) \leq \alpha'$$

森 肇

すなわち (13) の不等式をうる。//

今度は (19) において  $T_1$  をとめておいて ( $T_1 = T$ ),  $T_2 \rightarrow T_c$  とすると,

$$G_1(T_c, \eta_0) - G_{1c} \leq (T_c - T) [S_c - S^0(T)] \quad (21)$$

左辺は

$$\begin{aligned} G_1(T_c, \eta_0) - G_{1c} &= \int_0^{\eta_0} \left( \frac{\partial G_1}{\partial \eta} \right)_{T_c} d\eta \\ &= \int_0^{\eta_0} H_{T_c} d\eta \\ &\propto \eta_0^{\delta+1} \propto (T_c - T)^{\beta(\delta+1)} \end{aligned} \quad (22)$$

但し  $\eta_0$  が小さい ( $T$  が  $T_c$  に近い) 場合について考えている。他方右辺は

$$\begin{aligned} S_c - S^0(T) &= \int_T^{T_c} \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{H=0} dT \\ &= \int_T^{T_c} \frac{C_{H=0}}{T} dT \propto (T_c - T)^{-\alpha'+1} \end{aligned} \quad (23)$$

したがって不等式 (21) の両辺の対数を取り, 辺々  $-\ell n \epsilon$  で割り算するならば

$$-\beta(\delta+1) \leq -(-\alpha'+2)$$

すなわち (14) の不等式をうる。//

もっと micro な観点から明らかにすることは、特に dynamic な現象を考えるときに必要で、そのときには pair-correlation を考えなければならない。しかし、critical index について現在のところ確実に言えるのはこれら不等式だけである。そこには  $T_c$  の下に特有の量だけが入っている。但し、 $\delta$  という量は  $T=T_c$  での状態曲線からきまる。転移点の上での  $\alpha$ ,  $r$  については何も言えていない訳だが、これを言うには仮説が必要になる。その考え方については次節で紹介する。

## 2.5 新しい臨界状態方程式 ( 斉次性の仮定 )

臨界点の近傍を考える。まず Landau theory にならって自由エネルギー  $G_1(T, \eta)$  を order parameter で展開し、それを order parameter で微分すると

$$H = b\eta [(T - T_c) + c\eta^2] + O(\eta^5) \quad (24)$$

$H = 0$  のときだけ相転移が起こるので、かぎかつこの中を zero とおけば

$$\eta \propto \epsilon^\beta, \quad \beta = 1/2,$$

が求まる。これは古典論の結果である。(24) の右辺の  $[\ ]$  は  $\epsilon \equiv |T - T_c|/T_c$  と  $\eta^{1/\beta}$  との一次の斉次関数である。これを拡張して、一般に  $H/\eta$  は  $\epsilon$  と  $\eta^{1/\beta}$  との、次数  $r$  の斉次関数であると仮定する。

$$H = \eta \Psi(\epsilon, \eta^{1/\beta}), \quad (\text{次数 } r) \quad (25)$$

この  $r$  がすでに導入した  $r$  と同じものであることはあとでわかる。斉次関数であることから

$$H \sim \begin{cases} \eta \epsilon^r & \text{as } \eta \rightarrow 0 \\ \eta^{1+r/\beta} & \text{as } \epsilon \rightarrow 0 \end{cases} \quad (26)$$

$\epsilon^r$  をくくり出すと

$$H = \eta \epsilon^r f(\eta/\epsilon^\beta) \quad (27)$$

$\eta$  を斉次関数の中に編入して

$$H = \epsilon^{r+\beta} \phi(\eta/\epsilon^\beta) \quad (28)$$

これが求める状態方程式である。こうした仮定によれば、独立なパラメーターは  $\beta$ ,  $r$  という二つである。斉次性の仮定に加えて、 $H \approx 0$  のとき相転移が起らないことに対応し、関数  $\phi(x)$  は共存線上を除けば臨界点  $T_c$  のまわりで解析的であると仮定しよう。

$H=0$  での order parameter の値 (自発磁化等) は  $\phi(\eta/\epsilon^\beta)=0$  から求められる。これから

$$\eta_{H=0} \sim \epsilon^\beta \quad (T < T_c) \quad (29)$$

でなければならないことがわかる。等温帯磁率は、 $H$  を  $\eta$  で微分すれば求まる。つまり

$$\chi_T^{-1} = \epsilon^r \phi'(\eta/\epsilon^\beta) \sim \epsilon^r \quad (30)$$

$T=T_c$  での臨界指数  $\delta$  ( $H \sim \eta^\delta$ ) は、(28)において  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限を考えればただちに

$$\delta = 1 + \frac{r}{\beta} \quad (31)$$

定磁場比熱を計算するには Gibbs の free energy を求めればよいのだが、(6)を積分して(28)を入れれば

$$\begin{aligned} G_1(T, \eta) &= G_1^0(T) + \int_0^\eta H(T, \eta) d\eta, \\ &= G_1^0(T) + \epsilon^{r+2\beta} \Phi(\eta/\epsilon^\beta) \end{aligned} \quad (32)$$

従って零磁場比熱は、(2)を使って、

$$\begin{aligned} C_{H=0} &= -T \left( \frac{\partial^2 G_1}{\partial T^2} \right)_{H=0} \sim \epsilon^{r+2\beta-2}, \\ \therefore \alpha &= 2 - 2\beta - r. \end{aligned} \quad (33)$$

なお(30)および(33)は  $T_c$  の上下に依らない。

以上の結果をまとめると

$$\alpha' + 2\beta + r' = 2, \quad (34)$$

$$\alpha' + \beta(\delta + 1) = 2 \quad (35)$$

$$\alpha = \alpha', \quad r = r' \quad (36)$$

これらは斉次性の仮定と解析性の仮定の下に導かれたものであるが、厳密解のある二次

元 Ising では完全に満たされている。なお (34) は三次元 Ising では満たされない可能性がある (2・3 節の表を参照)。

(28) 式は,  $H$  を  $\epsilon^{\beta+\gamma}$  で scale し,  $\eta$  を  $\epsilon^{\beta}$  で scale すれば,  $H-\eta$  の等温線が温度に依存しない一つの曲線  $y=\phi(x)$  上に map されることを意味する。そのため状態方程式 (28) およびそれから導かれる関係式を thermodynamic scaling laws という。

## 2.6 Correlation scaling laws

臨界点近傍の特徴を order parameter の揺ぎの相関というもっとミクロな観点から考えてみよう。強磁性体を例として考えるが, 他の体系 (気体-液体の臨界点, 反強磁性体など) への変形も可能である。等温帯磁率および定磁場比熱は

$$\chi = \frac{1}{k_B T} \int \langle \delta M^0(\mathbf{r}) \delta M^0(\mathbf{r}') \rangle d\mathbf{r}', \quad (37)$$

$$C_H = \frac{1}{k_B T^2} \int \langle \delta E(\mathbf{r}) \delta E(\mathbf{r}') \rangle d\mathbf{r}' \quad (38)$$

とかける。ここに積分は体系全体にわたって行なう。被積分関数は二つの点  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  における磁化密度またはエネルギー密度の揺ぎの相関である。高温 ( $T \gg T_c$ ) では異なる点の間には相関はないが, 臨界点  $T_c$  に近づくと,  $\chi$  や  $C_H$  が異常に大きくなることは, これら揺ぎの相関が long range となり, 巨視物に隔った部分の間にも相関が現われることを意味する。この長距離相関のため, (37) および (38) において, 被積分関数が 0 でない積分領域が順次拡がり, 遂に臨界点では積分が発散するのである。(絶対零度で発達するのはスピン自身の相関であり, 臨界点で成長するのは“揺ぎ”の相関であって, この二つは別物であることに注意。)

この事情をもう少し詳しくみるため, 平衡点の周りの揺ぎを現象論的に考察しよう。自由エネルギーを磁化密度の揺ぎ  $\delta M^0(\mathbf{r})$  およびその勾配  $\nabla \delta M^0(\mathbf{r})$  で展開すれば,

$$G_1(T, \mathbf{M}) = G_1(T, \bar{\mathbf{M}}) + \int \left\{ \frac{1}{2\chi} [\delta M^0(\mathbf{r})]^2 + \frac{B}{2} [\nabla \delta M^0(\mathbf{r})]^2 \right\} d\mathbf{r} \quad (39)$$

ここで  $B$  はスピン間の交換相互作用で定まる常数で, この項は磁化密度の不均一に伴うエネルギーの増加を表わす。波動ベクトル  $\mathbf{k}$  をもつフーリエ成分



$$M_{\mathbf{k}}^0 = \int \delta M^0(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (40)$$

を使えば

$$\Delta G_1 = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\chi} + Bk^2 \right) M_{\mathbf{k}}^0 M_{\mathbf{k}}^{0*} \quad (41)$$

磁化密度の揺ぎに対する確率分布は、ボルツマンの定理に従えば、この自由エネルギーを使って  $\exp[-\beta \Delta G_1]$  で与えられる。これはガウス分布だから直ちに

$$\langle M_{\mathbf{k}}^0 M_{\mathbf{k}}^{0*} \rangle = \frac{Vk_B T}{(1/\chi) + Bk^2} \quad (42)$$

これを座標空間に戻すと、良く知られた screened coulomb type の相関

$$\langle \delta M^0(\mathbf{r}) \delta M^0(\mathbf{r}') \rangle = \frac{k_B T}{4\pi B} \frac{\exp[-\kappa |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (43)$$

$$\kappa = 1/\sqrt{B\chi} \quad (44)$$

がえられる。2.0 節の b) でふれたように、(42) は臨界点  $T_c$  の近傍で磁化密度の長波長の揺ぎが異常に大きくなることを意味する。この長波長の揺ぎが臨界点近傍の諸種の発散をきめるわけだが、これは correlation length

$$\xi \equiv 1/\kappa = \sqrt{B\chi} \quad (45)$$

で規定されるマクロな長距離相関の出現と等価である。相関距離  $\xi$  の臨界指数を

$$\xi \sim \epsilon^{-\nu} (T > T_c), \quad \epsilon^{-\nu'} (T < T_c) \quad (46)$$

とする。

臨界点の極く近傍では、実は、展開 (39) が成立しない可能性があり、Ornstein-Zernike form (43) からのはずれが予想される。そのはずれを、 $R \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  として

$$\langle \delta M^0(\mathbf{r}) \delta M^0(\mathbf{r}') \rangle = R^{-1-\eta} g(R/\xi), \quad (\eta > 0) \quad (47)$$

のように、パラメタ  $\eta$  で表わすことにしよう。これを (37) に代入すれば、(44) および

(45) に代って

$$\chi \sim \xi^{2-\eta} \quad (48)$$

したがって, (46) から

$$(2-\eta) \nu = r, \quad (2-\eta) \nu' = r' \quad (49)$$

の関係がえられる。これに対応して, (42) は

$$\langle M_{\mathbf{k}}^0 M_{\mathbf{k}}^{0*} \rangle = \xi^{2-\eta} f_0(k\xi) \quad (50)$$

と修正されることになる。(2.0 節の(19), (20)を参照)。

エネルギー密度の揺ぎ(38)についても同様の考察ができる。エネルギーと磁化は互いに独立な, 相加的な保存量である。(37)と(38)はそれぞれ long range order および short range order の揺ぎの相関を表わす。その他, もっと大きな cluster を含む諸種の臨界変数がある。しかしそれら臨界指数の長距離関数はすべて一つの特性距離  $\xi(\epsilon)$  で規定できると仮定しよう。例えば

$$\langle E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^* \rangle = \xi^{(\alpha/\nu)} f_E(k\xi) \quad (51)$$

この考えをさらに進めたものとして Kadanoff の理論を紹介しよう。thermodynamic scaling の仮説(28)および(32)は, 温度と磁場を独立変数にとれば

$$\eta = \epsilon^\beta \psi(H/\epsilon^\Delta), \quad (\Delta \equiv \beta + r) \quad (52)$$

$$G(\epsilon, H) = G^0(T) + \epsilon^{\beta+\Delta} \Psi(H/\epsilon^\Delta) \quad (53)$$

とかけるが, これらも導き出されるのである。

Ising 模型を考え, その結晶格子(格子間隔1の単純立方格子とする)を一辺の長さ  $L$  のマクロな立方体 block に分割する。ただし  $L$  は特性相関距離  $\xi$  より十分に小さいとする。すなわち

$$1 \ll L \ll \xi \quad (54)$$

系の性質は各 site のスピン間の相互作用によってきまるが, 臨界異常はマクロなスケールの長距離相関によってきまるから, これらのマクロな block 間の相関によってきまると考えてよい。従って臨界異常をきめるには, 各 site のスピンを要素として考え

る代りに、これらのマクロな block のスピン要素として考えることができる筈である。つまり、臨界異常に関する限りでは、site を要素とする元の体系はマクロな block を要素とする新しい体系へ map できる筈である。block (体積  $L^d$ ) を要素とするときには、L を長さの単位とすることにし、その単位で定義されたスピン密度、エネルギー密度を  $\sigma_L, E_L$ 、それらに共役な磁場、温度を  $h_L, \epsilon_L$  と L をつけて表わすことにしよう。site を要素とするときには、L を削ってたんに  $\sigma, E, h, \epsilon$  とかくことにする。さて、site または block を要素とする二つの立場から特性相関距離  $\xi(\epsilon, h)$  および Gibbs の自由エネルギー密度の singular part  $G^S(\epsilon, h)$  を見るとき、これら二つの立場の同等性は

$$\xi(\epsilon, h) = L \xi(\epsilon_L, h_L), \quad (55)$$

$$G^S(\epsilon, h) = L^{-d} G^S(\epsilon_L, h_L) \quad (56)$$

を与える。ここに d は系の次元数を表わす。なお右辺に L,  $L^{-d}$  が掛けてあるのは、右辺の  $\xi, G^S$  は L を長さの単位として定義されているからである。

いま site または block を要素とする二つの立場の間の変換が

$$h_L = L^x h, \quad \epsilon_L = L^y \epsilon \quad (57)$$

によって与えられるとしよう。ここで x, y は体系の詳細な性質に依存するかも知れない数である。この (57) を (55), (56) の右辺に入れば

$$\xi(\epsilon, h) = L \xi(L^y \epsilon, L^x h),$$

$$G^S(\epsilon, h) = L^{-d} G^S(L^y \epsilon, L^x h)$$

ところで、L は (54) の不等式の範囲内では任意だから、 $\xi$  および  $G^S$  の関数形は右辺で L が互に打消しあうような関数形でなければならない。このことから

$$\xi(\epsilon, h) = \epsilon^{-1/y} \varphi(h/\epsilon^{x/y}), \quad (58)$$

$$G^S(\epsilon, h) = \epsilon^{d/y} \psi(h/\epsilon^{x/y}) \quad (59)$$

がえられる。(59) は (53) の第二項に相当するから

$$\Delta = x/y, \quad \beta = -\Delta + d/y = (d-x)/y \quad (60)$$

の関係がえられる。(52)は(53)を磁場で微分すればえられるから, thermodynamic scaling laws が導き出されたことになる。

Kadanoff の block picture の特徴は諸種の相関関数の関数形をも決めうることにある。(56)および(57)から

$$\sigma h = L^{-d} \sigma_L h_L = L^{-d+x} \sigma_L h,$$

$$E \epsilon = L^{-d} E_L \epsilon_L = L^{-d+y} E_L \epsilon$$

したがって, スピン密度およびエネルギー密度の変換規則として

$$\boxed{\sigma = L^{x-d} \sigma_L,} \quad (61)$$

$$\boxed{E = L^{y-d} E_L} \quad (62)$$

がえられる。また(58)を(46)と比べることにより

$$\nu = \nu' = 1/y \quad (63)$$

がえられる。

スピン密度の相関関数

$$G(R, \epsilon, h) = \langle [\sigma(\mathbf{r}) - \langle \sigma \rangle][\sigma(\mathbf{r}') - \langle \sigma \rangle] \rangle \quad (64)$$

を考えよう。 $R \gg L$  のときには,  $\sigma(\mathbf{r})$  の代りに  $\sigma_L(\mathbf{r})$  を使ってもよい。block picture への変換

$$R \rightarrow R_L = R/L,$$

$$\epsilon \rightarrow \epsilon_L, \quad h \rightarrow h_L$$

に対して,  $G$  の関数形が不変であることから

$$G(R, \epsilon, h) = L^{2(x-d)} G(R/L, \epsilon L^y, h L^x)$$

右辺で  $L$  が互に打消しあわねばならないことから

$$G(R, \epsilon, h) = R^{2(x-d)} g(R \epsilon^{1/y}, h \epsilon^{-\Delta})$$

(60) および (52) から

$$2(x-d) = -2\beta y = ry - d$$

さらに (63) および (49) を使って変形することにより

$$G(R, \epsilon, h) = R^{-(d-2+\eta)} g(R/\xi, h/\epsilon^\Delta) \quad (65)$$

がえられる。これは (50) を  $d$  次元で座標空間に直したものに等しい。同様にしてエネルギー密度の相関関数は

$$\begin{aligned} & \langle [E(\mathbf{r}) - \langle E \rangle] [E(\mathbf{r}') - \langle E \rangle] \rangle \\ & = R^{-(d-\alpha/\nu)} g_E(R/\xi, h/\epsilon^\Delta) \end{aligned} \quad (66)$$

とかける。

$n$  個のスピンの相関関数は、どのスピン密度対の距離も  $L$  より十分に大きいときには同様にして求まる。スピン密度対は  $n(n-1)/2$  個あるが、それら対の距離の組を  $\{R_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\}$  と表わせば

$$G^{(n)}(\{R_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\}, \epsilon, h) = \xi^{n(x-d)} g(\{R_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}/\xi\}, h/\epsilon^\Delta) \quad (67)$$

がえられる。これらは動的臨界現象の研究において重要な役割を行なう。

諸種の臨界指数をスピン密度の相関関数に特有な臨界指数  $\nu$  および  $\eta$  で表わせば

$$\beta/\nu = (d-2+\eta)/2, \quad (68)$$

$$r/\nu = 2-\eta, \quad (69)$$

$$\alpha/\nu = (2/\nu) - d, \quad (70)$$

$$\epsilon = (d+2-\eta)/(d-2+\eta) \quad (71)$$

がえられる。 $\nu$  および  $\eta$  の値については、2.3 節の表を参照されたい。なお  $\alpha = 3$ ,  $\eta = 0$  のときには、 $\delta = 5$  となる。(63), (68) ~ (71) を correlation scaling relations という。これらを導くのに用いた仮定は thermodynamic scaling laws を導くのに用いた仮定よりも強い仮定と考えられている。なおある弱い仮定の下に

$$r/\nu \leq 2-\eta \quad (\text{Fisher 1969})$$

$$2-\eta \leq \frac{d(\delta-1)}{\delta+1} \quad (\text{Buckingham-Gunton 1969})$$

$$2 - \eta \leq \frac{dr'}{2\beta + r'} \quad (\text{Buckingham-Gunton 1969})$$

なる不等式がえられることを附記しておく。

最近の scaling laws の解説として

大林康二, 固体物理 5 (1970) No. 12, 678.

鈴木増雄, 物性 12 (1971) No. 9, 529.

を参照されたい。

【追記】 極く最近 K.G.Wilson (Phys.Rev.B4 (1971) 3174, 3184 ; Phys. Rev.Letters 28 (1972) 240, 548) は新しい観点を導入して Kadanoff の block picture を発展させた。block 間の有効相互作用を具体的に求めて変換法則 (55), (56) を定め, ここでは未知数のままとした  $y$  および  $\eta$  を決定する方法を見出した。現在古典的スピンで磁場零の場合に限られてはいるが, 諸種の新しい展開が予想される。